UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
IUT Ponsan

GEA S4
2023 -2024

Module "Logistique", (durée 1 h)

Correction du partiel du 15.02.2024

Exercice 1 Le gérant d'un primeur s'intéresse à la demande quotidienne D de pommes Golden (en kg).

1. Dans cette question, on suppose que $D \sim \mathcal{N}(130; 10)$ Déterminer le stock S_1 (en kg) à détenir en début de journée pour éviter une rupture avec probabilité 0.9 ? Quel stock S_2 faut il, si l'on impose une probabilité 0.95 ?

   La question se reformule en trouver le stock S_1 tel que $\mathbb{P}(D \leq S_1) = 0.9$. En centrant et renormalisant, on obtient $\mathbb{P}(X \leq \frac{S_1-130}{10}) = 0.9$ où $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$. La table donne alors $\frac{S_1-130}{10} = 1.282$, soit $\boxed{S_1 = 142, 82\ kg}$

   De même, on obtient $\boxed{S_2 = 146, 45\ kg}$

2. Pour affiner ses résultats, le gérant s'intéresse à la demande quotidienne d_i en kilos de "pommes Golden" d'un client i (choisi au hasard). Il suppose que la fréquentation journalière est de $n = 90$ clients indépendants les uns des autres et que loi des d_i est identique et est donnée par :

k (en kg)	0.5	1	2	5
$\mathbb{P}(d_i = k)$	0.3	0.4	0.2	0.1

   Sous ces hypothèses, préciser le stock S_3 (en kg) à détenir chaque matin pour satisfaire la demande avec probabilité 0.95.

   - En notant encore D la v.a "demande", la question revient à trouver S_3 tel que $\mathbb{P}(D \leq S_3) = 0.95$.
   - Il reste à trouver la loi de D. On a $D = \sum\limits_{i=1...90} d_i$, avec les d_i qui sont i.i.d en grand nombre (90). Ainsi, par le cours, on peut "approximer" la loi de D par une $\mathcal{N}(90\mathbb{E}(d_i); \sqrt{90}\sigma(d_i))$. Numériquement, $E(d_i) = 1.45\ et \sigma(d_i) \approx 1.29$. Soit donc Y une v.a telle que $Y \sim \mathcal{N}(130.5; 12.27)$
   - En renormalisant et centrant, on doit donc trouver S_3 tel que $\mathbb{P}(X \leq \frac{S_3-130.5}{12.27}) = 0.95$, où $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$. La table donne $\frac{S_3-130.5}{12.27} = 1.645$, puis $\boxed{S_3 = 150.7}$

3. Pouvez vous expliquer l'hypothèse sur la loi de D de la question 1 ?

   La loi proposée à la question 1 est assez proche de l'approximation en loi trouvée à la question 2.

4. Proposez un protocole que le gérant a pu mettre en place pour obtenir la loi d_i. Détaillez.

   Le gérant a pu observer sur un grand nombre de jours la demande en kg de ses clients. Puis, il a effectué les ratios (en divisant par l'effectif total de ses observations) pour en déduire les probabilités annoncées. Les ratios tendent en effet vers les probabilités lorsque la taille de l'échantillon grandit, en vertu de la *loi forte des grands nombres.*

5. Le gérant du primeur se sert auprès d'un fournisseur F qui conditionne ses pommes dans des cageots de 18 kg. F achète ses cageots 19 *euros* pièce et uniquement par douzaine. En cas de surplus de pommes, F a un coût de stockage de 10 *euros* par douzaine de cageots. Par contre, lorsqu'il n'arrive pas à satisfaire la demande d'un des 40 primeurs avec lesquels il travaille, il estime la dégradation de son image à un coût de 400 *euros* par douzaine de cageots non vendue. Un primeur a souvent des invendus d'un jour sur l'autre, et on estime ainsi à 0.65 la probabilité qu'il achéte une douzaine de cageots un matin à F.

   (a) Quel doit être le stock quotidien S_4 de F pour minimiser le coût de son entreprise ? (On exprimera S_4 en douzaine de cageots)

   Avec les notations du cours (entreprise F) et en considérant qu'un produit est "une douzaine de cageots", on a : $c = 19 \times 12 = 228$ €, $c_S = 10$ €et $c_M = 400$ €.

   Par la prop du cours, on cherche donc S_4 le plus petit entier tel que $\mathbb{P}(D \leq S_4) = \frac{c_M - c}{c_M + c_S} \approx 0.42$.

   La loi de D est une $Binomiale(40; 0.65)$ que l'on approxime donc par une $\mathcal{N}(26; 3.02)$

   En centrant et renomalisant, la table de la loi normale centrée réduite donne alors $\frac{S_4 - 26}{3.02} = -0.202$, puis $\boxed{S_4 = 26 \text{ douzaines de cageots}}$

   (b) Précisez la probabilité de satisfaction des clients primeurs avec ce stock $S4$?

   Avec ce stock S_4, la probabilité de satisfaction des primeurs est par définition $\frac{c_M - c}{c_M + c_S} \approx 0.42$

   (c) Quel devrait être le stock S_5 de F pour satisfaire ces clients avec probabilité 0.95 ? Comparez avec le stock S_4.

   Si l'on souhaite avoir une satisfaction clients (primeurs) de 0.95, on doit trouver S_5 tel que $\mathbb{P}(D \leq S_5) = 0.95$, avec encore $D \sim \mathcal{N}(26; 3.02)$. On obtient (après renormalisation et lecture table) :

   $\boxed{S_5 = 31 \text{ douzaine de cageots,}}$ qui est bien supérieur au stock S_4 car n'optimise pas la même quantité !

Exercice 2 Un grand hôtel moderne de 300 chambres pratique uniquement la réservation par internet (ainsi que le paiement). La chambre est à 80 *euros* la nuit. Un brillant étudiant de l'iut, effectuant son stage dans celui-ci, doit étudier si le *surbooking* est intéressant. On rappelle que le *surbooking* consiste à accepter davantage de réservations que de chambres disponibles. Comptant sur le désistement de certains clients, le directeur de l'hôtel (donc ici l'étudiant !) espére alors pouvoir loger toutes les personnes qui se présentent...

Après quelques rudiments de statistiques, l'étudiant estime à $p = 0.96$ la probabilité qu'un client ayant réservé se présente au comptoir. On notera N la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes qui se présentent à l'hôtel.

1. L'étudiant accepte 310 réservations. Quelle est la loi exacte de N ? Quelle est la probabilité qu'il puisse loger toutes les personnes qui se présentent ? (On pourra faire une approximation de la loi de N.)

   - La loi exacte de N est une $Binomiale(310; 0.96)$.
   - On cherche $\mathbb{P}(N \leq 300)$. En passant par l'événement contraire, on pourrait faire les 10 additions, mais par commodité (300 >> 30), on peut "approximer" la loi de N par une $\mathcal{N}(300\times 0.96; \sqrt{300 \times 0.96 \times 0.04})$, ie : $\mathcal{N}(297.6; 3.45)$.
   Ainsi, $\mathbb{P}(N \leq 300) \approx \mathbb{P}(X \leq \frac{300-297.6}{3.45}) = 0.75$ où $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

2. Trouvez le nombre n de réservations à accepter pour loger toutes les personnes qui se présentent avec proba $0,99$.

   → Notons encore N le nb de clients se présentant. Dans le cas où le nb de réservations est n, la loi de $N \sim Binomiale(n; 0.96)$ qui s'approche donc par une $\mathcal{N}(0.96n; \sqrt{0.96 \times 0.04 \times n})$, soit une $\mathcal{N}(0.96n; 0.196\sqrt{n})$.

   → La question posée revient à trouver n tel que $\mathbb{P}(N \leq 300) = 0.99$, qui se re écrit donc (après renormalisation et centrage) $\mathbb{P}(X \leq \frac{300-0.96n}{0.196\sqrt{n}}) = 0.99$.

   → A l'aide de la table, on déduit $\frac{300-0.96n}{0.196\sqrt{n}} = 2.326$, équation du 2nd degré en $\sqrt{n}$, qui se re écrit $0.96n+0.456\sqrt{n}-300 = 0$. Cette équation a 2 solutions ($\Delta \approx 1152.21 > 0$) qui sont approximativement 17.44 et -17.92. Par positivité de $\sqrt{n}$, on en déduit que $\sqrt{n} = 17.44$ puis que $\boxed{n = 304.}$

3. Après avoir revu ses calculs, l'étudiant accepte finalement 304 réservations. Si plus de 300 personnes se présentent au comptoir de l'hôtel, la direction rembourse le billet et offre une compensation "supplémentaire" de 150 *euros* à chaque personne lésée. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de personnes lésées et soit C le chiffre d'affaires de l'hôtel sur cette nuit. On admet que Z suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant (valeurs arrondies) :

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(Z = k)$	0,99825	0.00137	0.00032	$5.16\ 10^{-5}$	$8.4\ 10^{-6}$

   (a) Exprimez C en fonction de Z, puis en déduire $\mathbb{E}(C)$.

$$\begin{aligned} C &= \text{recettes} - (\text{compensation} + \text{prix billet}) \text{ pour personne(s) lésée(s)} \\ &= 304 \times 80 - (150 + 80)Z, \\ &= \boxed{\text{24320 -230Z.}} \end{aligned}$$

(b) Comparez alors le chiffre d'affaires obtenu en ouvrant exactement 300 réservations et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le *surbooking*. Conclusion ?

Sans *surbooking*, le chiffre d'affaires est de $80 \times 300 = \boxed{24000 \text{ €}}$
Avec *surbooking*, la moyenne du chiffre d'affaire est (par linéarité de l'espérance) : $\mathbb{E}(C) = 24320 - 230 \times \mathbb{E}(Z)$. Or à l'aide de la loi de Z donnée, le calcul de $E(Z)$ donne 0.0021984, et donc

$\boxed{\mathbb{E}(C) = 24319.4944 \text{ €avec } surbooking.}$

Conclusion : malgré l'offre (assez généreuse) de l'hotel pour personnes lésées, le *surbooking* reste avantageux !